位相空間論：完全不連結性と一点コンパクト化

1. 基礎的な定義

定義：完全不連結 (Totally Disconnected)　位相空間 X の連結部分集合が、空集合または1点集合のみであるとき、X は完全不連結であるという。

定義：クロープン集合 (Clopen Set)　開集合 (open set) であり、かつ閉集合 (closed set) でもある集合を**クロープン集合**と呼ぶ。

定義：一点コンパクト化 (One-point Compactification)　局所コンパクトなハウスドルフ空間 X に対し、新しい点 ∞ を加え、$X^* = X \cup \{\infty\}$ とする。∞ の開近傍を $U = X^* \setminus K$（K は X のコンパクト部分集合）と定義することで得られるコンパクト空間を X の一点コンパクト化と呼ぶ。

2. 完全不連結空間の性質と T_1 性

完全不連結空間 X は T_1 空間である。

証明：　任意の点 $x \in X$ に対し、その連結成分を $C(x)$ とする。 一般に、連結成分は常に閉集合である（連結集合の閉包も連結であり、連結成分は極大であるため）。 完全不連結の定義より、$C(x) = \{x\}$ である。 したがって、任意の1点集合 $\{x\}$ は閉集合となり、X は T_1 空間の定義を満たす。□

3. 無限離散空間の一点コンパクト化

無限離散空間 D の一点コンパクト化 $E = D \cup \{\infty\}$ を考える。D の部分は離散位相であるため、コンパクト集合は有限集合に限られる。

完全不連結・コンパクト・ハウスドルフ性の証明：

1. **コンパクト性**：任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し、∞ を含む $U \in \mathcal{U}$ が存在する。$E \setminus U$ は D の有限集合であるため、残りの点は有限個の開集合で覆える。
2. **ハウスドルフ性**：$x, y \in D$ は単元集合で分離可能。$x \in D$ と ∞ については、$V = \{x\}$（開集合）と $W = E \setminus \{x\}$（∞ を含み補集合が有限なため開集合）により分離可能。
3. **完全不連結性**：任意の点 $x \in D$ に対し、$\{x\}$ は開集合かつ、補集合 $E \setminus \{x\}$ も開集合である。よって $\{x\}$ はクロープン集合である。2点を含む集合は、これらのクロープン集合によって必ず分離（不連結化）される。

4. 非ハウスドルフな完全不連結コンパクト空間

構成： 無限離散空間 D の一点コンパクト化のコピーを2つ用意し、D の部分のみを貼り合わせた空間 $X = D \cup \{\infty, \infty'\}$ を考える。

性質の証明：

- **非ハウスドルフ性**：∞ の近傍は D の有限個を除く全点を含み、∞' の近傍も同様である。D が無限集合であるため、これら2つの近傍の交わりは常に空にならない。
- **完全不連結性**：D 内の点は単元クロープン集合で分離される。また、部分空間 $\{\infty, \infty'\}$ は、一方が D と共に開集合（例：$D \cup \{\infty\}$）となるため、相対位相において不連結である。

5. その他の完全不連結空間の例

1. 有理数の集合 $\mathbb{Q}$　通常の数直線 $\mathbb{R}$ の相対位相において、$\mathbb{Q}$ は完全不連結である。任意の2つの有理数の間には必ず無理数が存在するため、それを用いて空間を2つの開集合に分断できる。

2. カントール集合 $\mathcal{C}$　カントール集合は、コンパクト・ハウスドルフかつ完全不連結な空間の代表例である。この空間は「孤立点を持たない完全不連結なコンパクト・ハウスドルフ空間は、カントール集合と同相である」という極めて強い性質を持つ。